לוגיקה (1) – תרגיל (7)

1. הוכיחו את המשפט הבא: יהי G גרף ו- $\{c_1,\dots c_n\}$ קבוצה סופית של צבעים. אזי יש צביעה חוקית של G בצבעים $\{c_1,\dots c_n\}$ אםם לכל תת גרף סופי של G יש צביעה חוקית בצבעים $\{c_1,\dots c_n\}$.
הדרכה:
   א. היזכרו בהגדרה של צביעה חוקית כפי שהופיעה בתרגיל 6, שאלה 4, ושימו לב שכיוון אחד של המשפט טריביאלי.
   ב. בכיוון השני: בדומה לתרגיל 6, שאלה 4 הגדירו שפה לתחשיב הפסוקים וכתבו קבוצת פסוקים Γ בשפה שהגדרתם כך ש- Γ עקבית אםם ל-G יש צביעה חוקית.
   ג. השתמשו במשפט הקומפקטיות כדי להסיק את טענת המשפט: הראו שאם כל תת גרף סופי של G צביע אז כל תת קבוצה סופית של Γ היא עקבית.

2. תהי $L=\{P_1,\dots,P_n,\dots\}$ שפה לתחשיב הפסוקים. תהי S קבוצת כל המבנים לשפה L. בהינתן מבנים $A,B\in S$ נגדיר את המרחק $d(A,B)=\max\{1/n : A(P_n)\neq B(P_n)\}$ ו- $d(A,A)=0$. בהינתן $B\in S$ ו- $\varepsilon>0$ נגדיר $U_{B,\varepsilon}=\{A\in S : d(A,B)<\varepsilon\}$. $U_{B,\varepsilon}$ תקרא *סביבה* (של B) ב-S.
   א. הראו כי d מקיימת את אי-שוויון המשולש, כלומר בהינתן $A,B,C\in S$ מתקיים $d(A,C)\le d(A,B)+d(B,C)$.
   ב. בהינתן סביבה $U=U_{B,\varepsilon}$ מצאו פסוק φ_u כך ש- $Models(\varphi_U)=S\setminus U$.
   ג. יהי $\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$ כיסוי של S (כלומר, לכל $B\in S$ מתקיים $B\in\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$. הראו שקיים n טבעי כך שכבר $\bigcup_{i=1}^{n}U_i$ כיסוי של S (הדרכה: השתמשו בסעיף ב' ובמשפט הקומפקטיות).
   ד. הראו שכל *קבוצה סגורה* $D\subseteq S$ (כלומר: $S\setminus D$ היא איחוד של סביבות) היא מהצורה $D=Models(\Gamma)$ לאיזו קבוצת פסוקים Γ.

   הערה: בתרגיל זה הוכחתם ש-S הוא מרחב מטרי (עם המטריקה d) וכי S קומפקטי בטופולוגיה המטרית.

3. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   א. אם $\chi\models\varphi$ ו- $\chi\models\psi$ אז $\chi\models\varphi\vee\psi$.
   ב. אם $\chi\vee\psi\models\varphi$ אז $\psi\models\varphi$ או $\chi\models\varphi$.
   ג. אם $\chi\wedge\psi\models\varphi$ אז $\psi\models\varphi$ ו- $\chi\models\varphi$.
   ד. אם $\chi\models\varphi$ אז לא יתכן ש- $\neg\chi\models\varphi$.
   ה. אם $\chi\models\varphi$ אז $\neg\varphi\models\neg\chi$.
   ו. אם $\chi\models\varphi$ ו- $\chi\models\neg\varphi$ אז גם $\chi\models\psi$.

4. בתרגיל נעסוק בתחשיב היחסים. נגדיר כתיבה פולנית של שמות עצם באופן הבא:
   - כל קבוע אישי הוא ש"ע וכל משתנה אישי הוא ש"ע.
   - אם H הוא סימן פעולה n-מקומי ו- $t_1,\dots t_n$ הם שמות עצם אזי $Ht_1\dots t_n$ הוא ש"ע.
   - מחרוזת היא ש"ע אםם היא מאחת הצורות לעיל.

   א. הוכיחו באינדוקציה על היצירה ששום רישא ממש של ש"ע איננה ש"ע (שימו לב – עליכם להוכיח את הטענה עבור הכתיבה שהוגדרה כאן – ללא סוגריים).
   ב. הסיקו את משפט הקריאה היחידה לשמות עצם.